

## АНАЛИЗ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ КОМПОНЕНТ СМЕСЕЙ ПОСТОЯННОГО СОСТАВА

*В статье рассматриваются методы и способы создания достоверного исходного информационного обеспечения для моделирования переменных смесей природного или искусственно происхождения, с различными видами вещественного состава и фазовыми состояниями как самой смеси, так и ее компонент. Рассмотрены формы и методы задания переменных смесей и условия корректности задания переменной смеси. Приведен способ адекватного преобразования заданной многокомпонентной смеси в смесь с меньшим числом компонент вплоть до бинарной смеси, адекватной заданной.*

*В статті розглядається методи і способи створення достовірного початкового інформаційного забезпечення для моделювання змінних сумішей природного або штучно походження, з різними видами речового складу і фазовими станами як самої суміші, так і її компонент. Розглянуті форми і методи завдання змінних сумішей і умови коректності завдання змінної суміші. Приведений спосіб адекватного перетворення заданої багатокомпонентної суміші в суміш з меншим числом компонент аж до бінарної суміші, адекватної заданої*

*In the article examined methods and methods of creation of the reliable initial informative providing for the design of variable mixtures natural or artificially origin, with the different types of material composition and phase states of both mixture and her components. Considered forms and methods of task of variable mixtures and condition of correctness of task of variable mixture. The brought method over of adequate transformation of the set multicomponent mixture in mixture with the less number of components up to binary mixture, adequate set*

**Введение.** Полезные ископаемые являются многокомпонентными переменными смесями, относительное содержание которых не постоянно. Состав компонент полезных ископаемых определяет зону их практического использования, которая зависит не только от состава, но и от относительного содержания компонент. Состав и содержание компонент в полезном ископаемом однозначно определяют его как некоторую конкретную смесь с характерными параметрам.

Если состав смеси и относительное содержание компонент не изменяются, то очевидно, что характерными параметрами такой смеси будут: количество компонент и относительные содержания каждой компоненты в смеси. При этом условием корректного задания такой смеси будет равенство единице суммы относительных содержаний всех компонент.

Если состав смеси и относительное содержание компонент переменны, то характерными параметрами такой смеси будут: количество компонент и пределы изменения относительных содержаний для каждой компоненты в смеси. На практике пределы изменения относительных содержаний компонент смеси задаются в виде двумерного массива, в первой строке которого указываются максимальные значения относительного содержания компонент, а во второй строке – минимальные. В этом случае условие корректного задания такой переменной смеси не являются столь очевидными.

Действительно, сумма максимальных значений относительных содержаний компонент (сумма значений первой строки) ровно как и сумма минимальных значений относительных содержаний компонент (сумма значений второй строки) при корректном задании переменной смеси не могут быть равны единице. Более того, при корректном задании переменной смеси сумма максимальных значений относительных содержаний компонент должна быть больше единицы, а сумма минимальных значений – должна быть меньше единицы. Так как это условие задается неравенствами, то оно является необходимым, но не достаточным условием корректного задания переменной смеси. Для разрешения этих проблем необходимо определение других форм задания переменных смесей, имея которые можно было бы сформулировать достаточные условия корректности задания переменных смесей.

На практике, для определенного полезного ископаемого, количество компонент и пределы изменения относительного содержания определяются экспериментально в результате специальных исследований этого полезного ископаемого или в процессе эксплуатации месторождения. Методики исследований и контроля вещественного состава полезного ископаемого в процессе эксплуатации месторождения не гарантируют абсолютной точности получаемых результатов [1]. Поэтому для корректного задания переменной смеси на основании экспериментальных данных, необходима разработка способа согласования (балансировки) начальных экспериментальных данных относительно количества компонент и пределов изменения их относительного содержания.

Корректное задание переменной смеси необходимо при моделировании вещественного состава переменных смесей и прогноза относительного содержания компонент в системах оперативного контроля вещественного состава полезных ископаемых.

**Постановка заданий.** Данная работа посвящена проблеме анализа закономерностей изменения относительного содержания компонент в многокомпонентных переменных смесях для различных видов вещественного состава смесей, определения способов и форм корректного задания смесей переменного содержания, определения классификационных параметров смесей переменного содержания. Целью работы является получение достоверных исходных данных для моделирования изменения

данного вида вещественного состава при заданных параметрах смеси переменного содержания, способов проверки корректности задания смеси и методов корректировки не корректно заданных смесей переменного содержания, способов адекватного преобразования заданий многокомпонентной смеси в смесь с меньшим числом компонент (составные компоненты) вплоть до бинарной смеси.

**Изложение материалов и результатов исследований.** Любая конкретная реализация любой смеси обладает очевидным свойством:

$$\sum_{i=1}^N q_i = 1 \quad (1)$$

где  $i$  - порядковый номер компоненты;

$N$  - число компонент (группа);

$q_i$  - относительные содержания компонент.

Будем различать смеси с постоянным или переменным составом и смеси с постоянным или переменным содержанием.

Не маловажным вопросом для исследования закономерностей изменений состава и содержания смесей является вопрос сравнение конкретных смесей. Будем считать, что смеси с одинаковыми компонентами (смеси одинакового состава) являются сравнимыми смесями. Смеси с не одинаковым составом сравнивать невозможно, такие смеси можно только сопоставлять. Для сопоставления смесей дополнительно требуются не формальные критерии сопоставимости, формирование которых определяется задачами сопоставления. Вопросы сравнения и сопоставления смесей является отдельной задачей и данной работе подробно не рассматривается.

Таким образом, в данной работе будут рассматриваться переменные смеси постоянного состава с переменным содержанием компонент. В дальнейшем под термином «смесь» будем подразумевать переменную смесь постоянного состава с переменным содержанием. Другие варианты переменных смесей будут оговариваться отдельно.

Для задания смеси необходимо определить ряд ее параметров, которые должны включать следующее:

- Состав смеси;
- Тип смеси;
- Вид вещественного состава смеси;
- Группа смеси;
- Класс смеси.

**Состав смеси** включает физические свойства вещества, которое является смесью, и физические свойства веществ, которые являются компонентами смеси: природа веществ, фазовое состояние, плотность, назначение, использование и т.д.

**Тип смеси** определяет различия смесей, для которых количество компонент в смеси является постоянным или переменными, и относи-

тельные содержания отдельных компонент в той же смеси являются постоянными или переменными.

Если число компонент в смеси постоянно, то такая смесь является смесью постоянного состава, в противном случае будем иметь смесь переменного состава.

Если относительное содержание для каждой компоненты в смеси неизменно, то такая смесь является смесью постоянного содержания, в противном случае будем иметь смесь переменного содержания.

Так как эти свойства смеси могут проявляться одновременно, то можно различать четыре типа смеси:

- смеси постоянного состава и постоянного содержания;
- смеси переменного состава и постоянного содержания;
- смеси постоянного состава и переменного содержания;
- смеси переменного состава и переменного содержания.

Смеси первого типа (постоянного состава и постоянного содержанием) в природе не существуют, так как никаким опытом, ни для какого вида вещественного состава смеси нельзя доказать эти постоянства. Наоборот, переменность состава и содержания смеси очевидна. Только при обусловленных ограничениях для определенного вида вещественного состава смесь может рассматриваться как смесь первого типа. Смесь первого типа является стабильной и по составу и по содержанию и не рассматриваются в данной работе по очевидным причинам.

Смеси второго типа (переменного состава и постоянного содержания) также в природе не существуют и являются гипотетическими смесями, так как трудно себе представить смесь, в которой изменяется число компонент, а содержания соответствующих компонент не изменяются. При обусловленных ограничениях для определенного вида вещественного состава смесь может рассматриваться как смесь второго типа. Смесь второго типа является не стабильной по составу и в каждом конкретном случае может быть сведена к смеси первого типа.

Смеси третьего типа (постоянного состава и переменного содержания) также, как и первые два типа, в природе не существуют, так как никаким опытом, ни для какого вида вещественного состава смеси нельзя доказать постоянство состава смеси. Наоборот, переменность состава смеси очевидна. При обусловленных ограничениях для определенного вида вещественного состава, смесь может рассматриваться как смесь третьего типа. Смеси третьего типа являются не стабильными по содержанию и в данной работе являются основным предметом исследований.

Смеси четвертого типа (переменного состава и переменного содержания) являются реальными смесями, существующими в природе. При обусловленных ограничениях для определенного вида вещественного состава смесь может рассматриваться как смесь третьего типа. Смеси четвертого типа являются не стабильными и по составу и по содержанию. При обусловленных ограничениях для определенного вида вещественного

состава, в каждом конкретном случае смесь четвертого типа может быть сведена к смеси третьего типа.

**Вид вещественного состава смеси**, который определяет характерные особенности разделения смеси на компоненты (простые вещества смеси). Другими словами, вид вещественного состава смеси определяет характерные признаки простых веществ смеси. Видов вещественного состава может быть большое количество и определяется типом смеси и задачами анализа вещественного состава.

В самом общем случае задач анализа вещественного состава могут быть следующие его виды: – космический; – межгалактический; – галактический; – межзвездный; – звездный; – межпланетный; – планетарный; – минералогический; – химический; – элементный; – элементарный. Каждый вид вещественного состава конкретного вещества может быть адекватно преобразовав другой вид. Поэтому выбор вида вещественного состава вещества не имеет принципиального значения, а определяется задачами анализа вещественного состава и удобствами проведения последнего.

В дальнейшем будут рассматриваться конденсированные среды, представляющие собой природные смеси – рудные вещества, для которых актуальными могут быть следующие виды вещественного состава и их комбинации:

- минералогический;
- химический;
- элементный;
- элементарный.

Для задания и определения характера изменения вещественного состава железных руд необходимо определить основные свойства как смеси в целом, так и свойства компонент, входящих в ее состав.

Разделение сложного вещества на компоненты определяется видом вещественного состава на основании задач анализа. Так, состав железных руд на уровне минералогического вещественного состава определяется, структурой и текстурой рудных тел, составом минералов, сингонией отдельных минералов, структурой агрегатов и индивидуумов минералогических образований. Структуру рудных тел изучает технологическая минералогия [2], согласно которой все природные минералы подчинены онтогении, явлениям изоморфизма и генезиса. Все эти факторы обуславливают закономерности в соотношениях компонент минеральных веществ вообще и железных руд в частности.

Состав железных руд на уровне химического вещественного состава определяется химическими соединениями, образующие отдельные минералы, сингонией и структурой агрегатов и индивидуумов минералогических образований, обуславливая закономерности в соотношениях химических компонент отдельных минеральных веществ железных руд.

Состав железных руд на уровне элементного вещественного состава определяется химическими элементами, образующие отдельные химиче-



ские соединения, и законами химических взаимодействий отдельных элементов между собой, обуславливая закономерности в соотношениях химических элементов в отдельных химических соединениях вещества железных руд.

Состав железных руд на уровне элементарного вещественного состава определяется элементарными частицами, образующие отдельные атомы химических элементов, периодическим законом химических элементов и законов взаимодействия элементарных частиц, обуславливая закономерности в соотношениях элементарных частиц отдельных атомов веществ железных руд.

Между видами вещественного состава существуют взаимосвязи, позволяющие выполнять взаимные адекватные переходы.

Группа смеси представляет собой количество компонент смеси в соответствии с заданным видом вещественного состава. Для заданной конкретной смеси значение группы является постоянным. Если для заданной смеси изменяется значение группы смеси, то это означает, что смесь является смесью с переменным составом.

**Класс смеси** является наиболее полным и универсальным параметром заданной смеси. Класс смеси представляет собой набор данных – таблицу, в которую включаются значения пределов относительного содержания каждой компоненты смеси в соответствии с заданным видом вещественного состава. Класс смеси может быть получен в результате аналитических исследований вещественного состава смеси с использованием статистических методов или на основании расчетных данных.

Формат таблицы значений пределов относительного содержания компоненты смеси определяет форму задания смеси и представляет собой двумерный массив с двумя строками и столбцами, число которых равно числу компонент в смеси. В верхнюю строку таблицы заносятся максимальные значения содержаний отдельных компонент и в нижнюю строку таблицы заносятся минимальные значения содержания отдельных компонент соответственно.

Вещественный состав конкретного сложного физического вещества с переменным относительным содержанием может быть представлен системой простых веществ, входящих в его состав, в виде конечной последовательности простых веществ, расположенных в определенной порядке, и последовательности значений относительных содержаний простых веществ, расположенных в той же порядке, в виде массива относительных содержаний простых веществ (2) для любого принятого вида вещественного состава:

$$\{q_1; q_2; \dots; q_i; \dots; q_N\} \in M_{VS}; \quad (2)$$

где  $i$  - порядковый номер компоненты;

$N$  - число компонент (группа);

$q_i$  - относительные содержания компонент.

Очевидно, что сумма относительных содержаний конкретного сложного физического вещества должна быть равна единице (1). Если условие (1) выполняется, то массив (2) будет представлять собой так называемое конечное сбалансированное множество. Таким образом, массив относительных содержаний компонент для любого конкретного сложного физического вещества всегда является конечным сбалансированным множеством.

Условие (1) накладывает ограничения на значения максимальных и минимальных относительных содержаний в массиве класса вещественного состава заданной смеси, выполнение которых обеспечивает корректность задания смеси.

Вещественный состав руды считается заданным, если задан вид вещественного состава, полный список компонент, корректно заданы минимальные и максимальные значения относительных содержаний каждой компоненты и порядок расположения компонент.

Массив класса вещественного состава заданной смеси будем называть нормальной формой (НФ) задания смеси, если первая строка этого массива состоит из максимальных значений содержания компонент, а вторая строка – из соответствующих минимальных значений содержания компонент.

Для проверки корректности задания смеси или, что то же самое, сбалансированности нормальной формой (НФ) задания смеси необходимо, путем перестановки максимальных и минимальных значений содержания для каждой компоненты в нормальной форме (НФ) задания смеси, получить новые две строки. Перестановки выполняются до тех пор, пока сумма значений каждой новой строки не станет равной единице. Если такую перестановку не удастся осуществить, то это означает, что массив класса смеси задан не корректно, а нормальная форма (НФ) задания смеси не сбалансирована. Формально, условие корректности массив класса смеси можно записать следующим образом

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (q_{\max i} + q_{\min i}) = 1; \quad (3)$$

где  $i$  - порядковый номер компоненты;

$N$  - число компонент (группа);

$q_{\max i}$  - максимальное значение относительного содержания компонент;

$q_{\min i}$  - минимальное значение относительного содержания компонент.

Порядок расположения компонент в нормальной форме (НФ) задания смеси и соответственно в массиве класса смеси, вообще-то, не имеет значения, но, как будет видно ниже, упорядочение компонент в нормальной форме (НФ) задания смеси обеспечивает системный подход, который обеспечит учет некоторых важных параметров компонент смеси. Такими факторами компонент смеси, к примеру, может быть фактор значимости или фактор доминирования компонент в смеси. Эти факторы могут задаваться для каждой компоненты смеси исходя из независимых внешних требований. Формально, порядок расположения компонент смеси в нор-

мальной форме (НФ) задания смеси может быть определен с помощью специальной доминантной функции, получение которой в рамках настоящей статьи (настоящего раздела) не рассматривается.

На практике, получаемые нормальные формы (НФ) задания природных смесей (руд), определенные в результате экспериментальных и статистических исследований природных смесей (руд), в большинстве случаев являются не сбалансированными. Если проверку сбалансированности начальной нормальной формы (НФ) задания смеси, полученной на основании данных экспериментальных и статистических исследований, можно довольно просто выполнить с помощью выражения (3), то балансировка начальной нормальной формы (НФ) задания смесей требует специальной процедуры, которая заключается в следующем.

Пусть задан конечный двумерный массив  $M_A$ , состоящего из любых положительных неодинаковых чисел (4), состоящего из двух строк и конечного числа столбцов:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{1,1}; & a_{1,2}; & \dots & a_{1,i}; & \dots & a_{1,N} \\ a_{2,1}; & a_{2,2}; & \dots & a_{2,i}; & \dots & a_{2,N} \end{array} \right\} \in M_A, \quad (4)$$

находим суммы значений элементов для первой строки (5) и для второй строки (6):

$$S_{A1} = \sum_{i=1}^N a_{1,i}; \quad (5)$$

$$S_{A2} = \sum_{i=1}^N a_{2,i}; \quad (6)$$

где  $i$  - номер столбца массива;

$N$  - число столбцов массива;

$a_{1i}$  - числа первой строки массива;

$a_{2i}$  - числа второй строки массива.

$S_1$  - сумма чисел первой строки массива;

$S_2$  - сумма чисел второй строки массива.

Затем определяем новый массив  $M_B$  той же размерности (7):

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} b_{1,1}; & b_{1,2}; & \dots & b_{1,i}; & \dots & b_{1,N} \\ b_{2,1}; & b_{2,2}; & \dots & b_{2,i}; & \dots & b_{2,N} \end{array} \right\} \in M_B, \quad (7)$$

где  $b_{1,i} = \frac{a_{1,i}}{S_{A1}}$  числа первой строки массива;

$b_{2,i} = \frac{a_{2,i}}{S_{A2}}$  числа второй строки массива.

Очевидно, что сумма элементов первой строки как и сумма элементов второй строки массива  $M_B$  (7) будут равны единице. Отсортировав



каждый столбец массива  $M_B$  (7) по убыванию, получим корректный массив класса нормальной формы (НФ) задания смеси, для которого будет выполняться условие (3).

Для сортировки столбцов массива  $M_B$  (7) по убыванию воспользуемся переключающими функциями:

для первой строки (строки максимумов):

$$g_{\max i} = b_{1,i} \cdot \frac{R_i + 1}{2} - b_{2,1} \cdot \frac{R_i - 1}{2}; \quad (8)$$

для второй строки (строки минимумов):

$$g_{\min i} = b_{2,i} \cdot \frac{R_i + 1}{2} - b_{1,i} \cdot \frac{R_i - 1}{2}; \quad (9)$$

где  $R_i$  ранг столбца.

Ранг столбца представляет знак разности элемента первой строки и элемента второй строки заданного столбца массива  $M_B$  (7) и определяется по выражению (10):

$$R_i = \text{sign}(b_{1,i} - b_{2,i}); \quad (10)$$

Таким образом, используя выражения (8), (9) и (10), массив  $M_B$  (7) преобразовываем в корректный массив класса  $M_K$  (11)

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} g_{\max 1}; & g_{\max 2}; & \dots & g_{\max i}; & \dots & g_{\max N} \\ g_{\min 1}; & g_{\min 2}; & \dots & g_{\min i}; & \dots & g_{\min N} \end{array} \right\} \in M_K \quad (11)$$

Пример преобразования исходного массива любых чисел в корректный массив класса приведен в таблицах (табл. 1 и табл. 2), а соответствующие графики на рис. 1 и рис. 2.

Таблица 1

Пример – 1. Преобразования исходного массива любых значений в корректный массив класса

M <sub>A</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,2</sub>	a <sub>1,3</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,5</sub>	S <sub>A1</sub> =	3,5044663	(S <sub>A1</sub> +S <sub>A2</sub> )/2=	2,82
	0,9163274	0,6333646	0,7037094	0,9673146	0,2837503				
M <sub>B</sub>	b <sub>1,1</sub>	b <sub>1,2</sub>	b <sub>1,3</sub>	b <sub>1,4</sub>	b <sub>1,5</sub>	S <sub>B1</sub> =	100,00%	(S <sub>B1</sub> +S <sub>B2</sub> )/2=	1
	26,15%	18,07%	20,08%	27,60%	8,10%				
M <sub>K</sub>	g <sub>max1</sub>	g <sub>max2</sub>	g <sub>max3</sub>	g <sub>max4</sub>	g <sub>max5</sub>	S <sub>K1</sub> =	129,64%	(S <sub>K1</sub> +S <sub>K2</sub> )/2=	1
	26,15%	39,64%	28,15%	27,60%	8,10%				
R	1	-1	-1	1	1	S <sub>A2</sub> =	2,1290737	S <sub>B2</sub> =	100,00%
M <sub>K</sub>	g <sub>min1</sub>	g <sub>min2</sub>	g <sub>min3</sub>	g <sub>min4</sub>	g <sub>min5</sub>	S <sub>K2</sub> =	70,36%		
	25,94%	18,07%	20,08%	0,38%	5,89%				

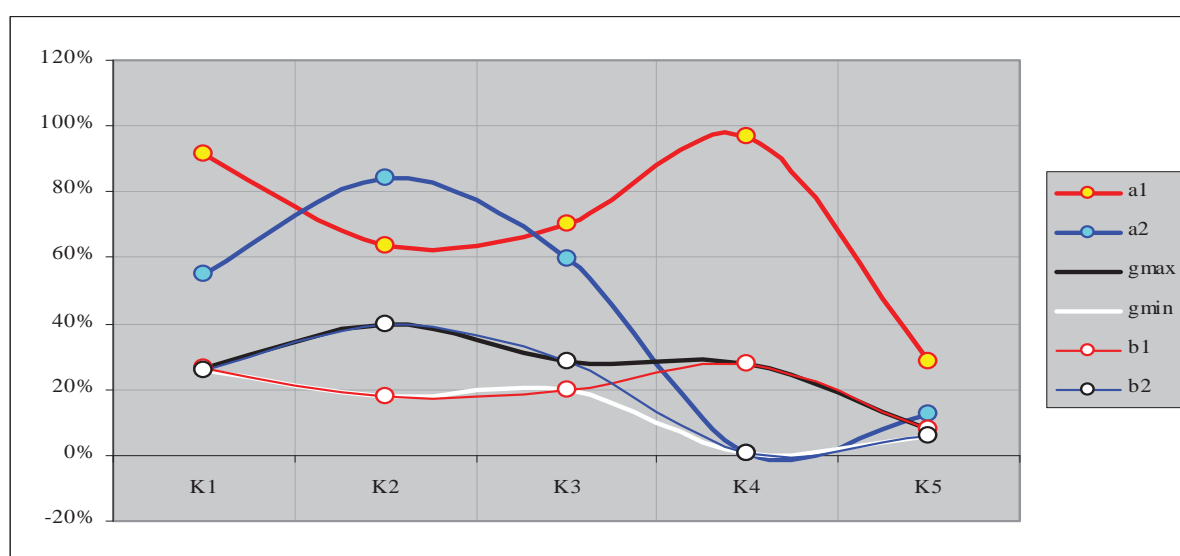


Рис. 1. Пример – 1. График изменения исходного массива любых значений в корректный массив класса

Таблица 2

Пример – 2. Преобразования исходного массива любых значений в корректный массив класса

M <sub>A</sub>	a <sub>1,1</sub>	a <sub>1,2</sub>	a <sub>1,3</sub>	a <sub>1,4</sub>	a <sub>1,5</sub>	S <sub>A1</sub> =	1,7555497	(S <sub>A1</sub> +S <sub>A2</sub> )/2=	2,4
	0,0017148	0,0997337	0,76744	0,776567	0,1100942				
M <sub>B</sub>	b <sub>1,1</sub>	b <sub>1,2</sub>	b <sub>1,3</sub>	b <sub>1,4</sub>	b <sub>1,5</sub>	S <sub>B1</sub> =	100,00%	(S <sub>B1</sub> +S <sub>B2</sub> )/2=	1
	0,10%	5,68%	43,72%	44,23%	6,27%				
M <sub>K</sub>	g <sub>max1</sub>	g <sub>max2</sub>	g <sub>max3</sub>	g <sub>max4</sub>	g <sub>max5</sub>	S <sub>K1</sub> =	150,08%	(S <sub>K1</sub> +S <sub>K2</sub> )/2=	1
	9,19%	23,78%	43,72%	44,23%	29,16%				
R	-1	-1	1	1	-1	S <sub>A2</sub> =	3,0473066	S <sub>B2</sub> =	100,00%
M <sub>K</sub>	g <sub>min1</sub>	g <sub>min2</sub>	g <sub>min3</sub>	g <sub>min4</sub>	g <sub>min5</sub>	S <sub>K2</sub> =	49,92%		
	0,10%	5,68%	11,78%	26,09%	6,27%				

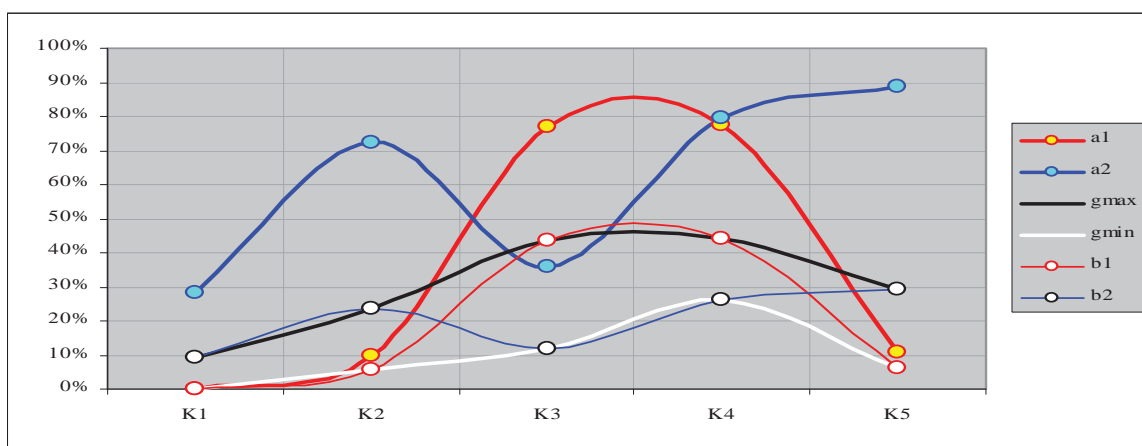


Рис. 2. Пример – 2. График изменения исходного массива любых значений в корректный массив класса

Это общий принцип получения корректного массива класса.

Из приведенных примеров (табл. 2) видно, что массивы  $M_B$  (7) и  $M_K$  (11) в каждой соответствующем столбце содержат одинаковые числа, кроме того, сумма чисел каждой строки массива  $M_B$  (7) равна единице. Таким образом, если принять массив  $M_K$  (11) за массив класса нормальной формы (НФ) задания смеси, то массив  $M_B$  (7) является конечным удачным результатом перестановок значений для каждого столбца массива  $M_K$  (11), что обеспечивает выполнение условия сбалансированности (3) нормальной формы (НФ) задания смеси. Из приведенных примеров (табл. 2) видно, что условия (3) выполняются. Из этого следует, что массив  $M_B$  (7) так же можно использовать как массив класса задания смеси, но с другой формой задания смеси. Такую форму массива класса будем называть предельной формой (ПФ) задания смеси.

Массив класса предельной формы (ПФ) задания смеси и массив класса нормальной формы (НФ) задания смеси имеют одинаковый размер и одинаковую размерность и состоят из одних и тех же чисел. Отличия заключаются в том, что строки массива класса предельной формы (ПФ) задания смеси представляют две предельные реализации заданной смеси, между которыми находятся все конкретные ее реализации. Строки предельной формы (ПФ) задания смеси не имеют отличительных признаков и являются равноправными.

Условием сбалансированности предельной формы (ПФ) задания смеси является выполнение условия (1) для каждой строки массива класса.

Отличие строк предельной формы (ПФ) задания смеси является относительным и заключается в том, что каждая строка массива класса предельной формы (ПФ) задания смеси состоит из различных чисел, сумма которых для каждой отдельной строки равна единице. В то же время, для нормальной формы (НФ) задания смеси сумма значений одной (первой) строки больше единицы, а сумма значений другой (второй) строки меньше единицы, при выполнении условия (3).

Одну строку массива класса предельной формы (ПФ) задания смеси будем называть верхним пределом содержаний смеси (В), а другую – нижним пределом содержаний смеси (Н). При этом не имеет особого значения, какую из строк массива класса предельной формы (ПФ) задания смеси выбрать в качестве верхнего предела, а какую – в качестве нижнего предела содержаний заданной смеси.

Так как нормальная форма (НФ) и предельная форма (ПФ) являются различными формами задания одной и той же смеси, то между ними должны быть однозначные переходы.

Переход от предельной формы (ПФ) задания смеси к нормальной форме (НФ) очевиден. В этом случае необходимо отсортировать каждый столбец массива класса предельной формы (ПФ) задания смеси, по убыванию, в результате чего получим нормальную форму (НФ) задания той же смеси.

Переход от нормальной формы (НФ) задания смеси к предельной форме (ПФ) не возможен без данных о рангах компонент смеси. Массив рангов компонент смеси можно получить по выражению (10), если известна предельная форма (ПФ) задания смеси, но именно ее и требуется определить. Для разрешения этого противоречия более подробно остановимся на понятии ранга компоненты заданной смеси.

Согласно (10), значение ранга компоненты смеси может принимать три значения:  $+1$ ;  $-1$ ;  $0$ .

Ранг компоненты смеси (или столбца массива класса) показывает относительное направление изменения содержания компоненты в заданной смеси при предельном переходе содержаний смеси, если относительное изменение одной компоненты известно. Если ранг компоненты  $+1$  и содержание ее при предельном переходе увеличивается, то содержание всех остальных компонент с рангом  $+1$  будет увеличиваться, а содержание всех компонент с рангом  $-1$  – будут уменьшаться. Если при изменении содержаний смеси содержание каких-то компонент не изменяется, то ранг такой компоненты будет равен  $0$ . Другими словами, ранг компоненты – это знак производной предельного перехода содержаний компонент заданной смеси от нижнего предела (Н) содержаний к верхнему (В) пределу содержаний.

Если ранги некоторых компонент заданной смеси равны нулю, то это означает, что данные компоненты отсутствуют в заданной смеси (минимальное значение содержания и максимальное значение содержания равно нулю), либо значение содержаний этих компонент постоянно и не изменяются при изменении других компонент.

Особый случай представляет вариант, когда содержание какой-нибудь одной компоненты равно единице. При этом ранг этой компоненты и ранги всех остальных компонент будут равны нулю. Это объясняется тем обстоятельством, что если содержание одной из компонент в конкретной реализации заданной смеси становится равным единице, то все

остальные содержания компонент должны быть нулевыми, согласно свойству (1), а смесь в этой конкретной реализации будет представлена только одной компонентой.

Таким образом, если ранг компоненты в заданной смеси равен нулю, то эту компоненту можно исключить из задания смеси и соответственно понизить группу смеси. С другой стороны, любую заданную смесь формально можно дополнить новыми компонентами с нулевыми пределами изменения содержания и нулевыми рангами и, соответственно, повысить группу смеси.

Отдельного внимания заслуживает вопрос о ранговых массивах заданных смесей, при рассмотрении которого определим свойства ранговых массивов.

**Ранговым массивом** заданной смеси называется одномерный массив рангов компонент смеси, количество которых равно количеству компонент, и расположенных в том же порядке, что и компоненты в массиве класса заданной смеси.

Каждый член рангового массива заданной смеси может принимать три значения: +1; -1; 0.

Ранговые массивы смесей первого и второго типов содержат нулевые значения.

Ранговые массивы смесей третьего и четвертого типов содержат значения: +1 и -1. В некоторых случаях смесей третьего и четвертого типов отдельные члены рангового массива могут иметь нулевые значения.

Следует отметить, что для смеси постоянного состава и переменного содержания (смесь третьего типа) ранговый массив не может содержать значения одного знака. В каждом ранговом массиве должен присутствовать хотя бы один член, знак которого отличаться от знаков других членов. Это следует из того, что для любых реализаций заданной смеси должно выполняться условие (1), что обуславливает наличие хотя бы одной компоненты, направление изменения которой отличается от других.

Свойства рангового массива формально можно представить (12), (13):

$$\sum_{i=1}^N |R_i| = N; \quad (12)$$

$$\left| \sum_{i=1}^N R_i \right| < \sum_{i=1}^N |R_i| - 1; \quad (13)$$

где  $i$  - номер компоненты заданной смеси;

$N$  - число компонент заданной смеси;

$R_i$  - ранг компоненты заданной смеси.

Учитывая свойства (12), (13) и то, что перемещение мест строк и столбцов в массиве класса не изменяет задаваемую этим массивом смесь, умножение членов рангового массива смеси на минус единицу так же не изменяет задание смеси. Таким образом, заданный ранговый массив смеси



и ранговый массив смеси, полученный умножением членов этого рангового массива смеси на минус единицу, одинаковы.

Для заданной группы смеси имеется конечное число неодинаковых ранговых массивов, число которых определяется по выражению (14):

$$K_R = 2^{N-1} - 1 \quad (14)$$

где N - число компонент заданной смеси;

$K_R$  - число неодинаковых ранговых массивов;

Если известна начальная нормальная форма (НФ) задания смеси с корректным или с не корректным массивом класса, ранговый массив для этой смеси может быть получен на основании общих принципов получения корректного массива класса (4) –(11). При этом, начальная предельная форма (ПФ) задания смеси должна быть получена непосредственно из начальной нормальной формы (НФ), используя значения, так называемого, начального рангового массива (15). Выполняя последовательно пять ниже приведенных действий, получим сбалансированную предельную форму (ПФ) (18), (19), ранговый массив (20) и сбалансированную нормальную форму (ПФ) (21), (22) задания смеси:

1. Элементы начального рангового массива определяются как (15):

$$R_{0i} = \text{sign} \left( \frac{q_{0\max i}}{\sum_{i=1}^N q_{0\max i}} - \frac{q_{0\min i}}{\sum_{i=1}^N q_{0\min i}} \right); \quad (15)$$

где  $i$  - номер компоненты заданной смеси;

N - число компонент заданной смеси;

$q_{0\max i}$  - значения первой строки начальной нормальной формы (НФ) задания смеси;

$q_{0\min i}$  - значения второй строки начальной нормальной формы (НФ) задания смеси;

$R_{0i}$  - элемент начального рангового массива заданной смеси.

2. Элементы начальной предельной формы (ПФ) задания смеси будут определяться как (16), (17):

$$q_{Bi} = q_{0\max i} \frac{R_{0i} + 1}{2} - q_{0\min i} \frac{R_{0i} - 1}{2}; \quad (16)$$

$$q_{Hi} = q_{0\min i} \frac{R_{0i} + 1}{2} - q_{0\max i} \frac{R_{0i} - 1}{2}; \quad (17)$$

где  $q_{Bi}$  - значения первой строки начальной предельной формы (ПФ) задания смеси;

$q_{Hi}$  - значения второй строки начальной предельной формы (ПФ) задания смеси.

Полученная таким образом начальная предельная форма (ПФ) задания смеси (16), (17) может быть не сбалансированной.

3. Элементы сбалансированной предельной формы (ПФ) задания смеси с корректным массивом класса будут определяться как (18), (19):

$$q_{Bbi} = \frac{q_{Bi}}{\sum_{i=1}^N q_{Bi}}; \quad (18)$$

$$q_{Hbi} = \frac{q_{Hi}}{\sum_{i=1}^N q_{Hi}}; \quad (19)$$

где  $q_{Bbi}$  - значения первой строки сбалансированной предельной формы (ПФ) задания смеси;

$q_{Hbi}$  - значения второй строки сбалансированной предельной формы (ПФ) задания смеси.

4. Элементы рангового массива определяются как (20):

$$R_i = \text{sign}(q_{Bbi} - q_{Hbi}) \quad (20)$$

где  $R_i$  - элемент рангового массива заданной смеси.

5. Элементы сбалансированной нормальной формы (НФ) задания смеси с корректным массивом класса будут (21), (22):

$$q_{\max i} = q_{Bbi} \frac{R_i + 1}{2} - q_{Hbi} \frac{R_i - 1}{2} \quad (21)$$

$$q_{\min i} = q_{Hbi} \frac{R_i + 1}{2} - q_{Bbi} \frac{R_i - 1}{2} \quad (22)$$

Где  $q_{0\max I}$  - значения первой строки сбалансированной нормальной формы (НФ) задания смеси;

$q_{0\min I}$  - значения второй строки сбалансированной нормальной формы (НФ) задания смеси.

**Пример определения рангового массива** по начальной нормальной форме (НФ) задания смеси с не корректным массивом класса приведен в табл. 3:

Таблица 3

Пример определения рангового массива с не корректным массивом класса

$i$	1	2	3	4	5	Сумма	Критерий
$q_{0max i}$	1,698083	0,293043	1,110931	1,640009	0,894274	5,636339	3,636479
$q_{0min i}$	0,3505	4,17E-05	0,247393	0,464381	0,574303	1,636618	
$R_{0i}$	1	1	1	1	-1		
$q_{Bi}$	1,698083	0,293043	1,110931	1,640009	0,574303	5,316368	3,636479
$q_{Hi}$	0,3505	4,17E-05	0,247393	0,464381	0,894274	1,95659	
$q_{Bbi}$	31,94%	5,51%	20,90%	30,85%	10,80%	100,00%	1
$q_{Hbi}$	17,91%	0,00%	12,64%	23,73%	45,71%	100,00%	
$R_i$	1	1	1	1	-1		
$q_{max i}$	31,94%	5,51%	20,90%	30,85%	45,71%	134,90%	1
$q_{min i}$	17,91%	0,00%	12,64%	23,73%	10,80%	65,10%	

Пример определения рангового массива по начальной нормальной форме (НФ) задания смеси с корректным массивом класса приведен в табл. 4.

Таблица 4

Пример определения рангового массива с корректным массивом класса

$i$	1	2	3	4	5	Сумма	Критерий
$q_{0max i}$	0,301274	0,051992	0,197101	0,290971	0,350908	<b>1,192246</b>	1
$q_{0min i}$	0,214161	2,55E-05	0,151161	0,283744	0,158662	<b>0,807754</b>	
$R_{0i}$	-1	1	-1	-1	1		
$q_{Bi}$	0,214161	0,051992	0,151161	0,283744	0,350908	<b>1,051966</b>	1
$q_{Hi}$	0,301274	2,55E-05	0,197101	0,290971	0,158662	<b>0,948034</b>	
$q_{Bbi}$	20,36%	4,94%	14,37%	26,97%	33,36%	<b>100,00%</b>	1
$q_{Hbi}$	31,78%	0,00%	20,79%	30,69%	16,74%	<b>100,00%</b>	
$R_i$	-1	1	-1	-1	1		
$q_{max i}$	31,78%	4,94%	20,79%	30,69%	33,36%	<b>121,56%</b>	1
$q_{min i}$	20,36%	0,00%	14,37%	26,97%	16,74%	<b>78,44%</b>	

Как показали исследования, метод определения рангового массива смеси по нормальной форме (НФ) задания смеси является ориентировочным с максимальным приближением. Определение рангового массива смеси по предельной форме (ПФ) задания смеси является абсолютным методом.

Для сравнения ранговых массивов смесей удобно использовать ранговый индекс смеси ( $R_{is}$ ), который для заданной смеси определяется по выражению (23):

$$R_{is} = \sum_{i=1}^N (1 - R_i) \cdot 2^{N-1-i}; \quad (23)$$

Ранговый индекс смеси можно использовать как дополнительный параметр классификации смесей.

Предельная форма (ПФ) задания смеси позволяет уменьшить группу за счет объединения отдельных компонент заданной смеси в составные компоненты, вплоть до бинарной смеси (группа 2), с любыми комбинациями компонент заданной смеси в составных компонентах.

Представление многокомпонентной смеси в виде бинарной смеси является оптимальным, если в одну составную компоненту входя компоненты заданной смеси с положительным рангом, а в другую составную компоненту входят компоненты заданной смеси с отрицательным рангом.

**Рассмотрим пример** преобразования задания многокомпонентной смеси в задание бинарной смеси.

Пусть задана пятикомпонентная смесь (данные см. табл. 4), предельная форма (ПФ) (табл. 5) и соответствующий ранговый массив (табл. 6). Для рангового массива (табл. 6) по выражению (23) вычисляем значение рангового индекса смеси  $R_{is}$  (см. табл. 6 – последняя колонка).

Таблица 5

*Предельная форма (ПФ) задания пятикомпонентной смеси*

i	1	2	3	4	5	Сумма
$q_{Bbi}$	20,36%	4,94%	14,37%	26,97%	33,36%	100,00%
$q_{Hbi}$	31,78%	0,00%	20,79%	30,69%	16,74%	100,00%

Таблица 6

*Ранговый массив пятикомпонентной смеси*

i	1	2	3	4	5	$R_{is}$
$R_i$	-1	1	-1	-1	1	22

#### Задача №1

Необходимо пятикомпонентную смесь, заданную предельной формой (ПФ) (табл. 5) представить в виде следующей адекватной бинарной смеси:

– первой компонентой адекватной бинарной смеси является первая компонента пятикомпонентной смеси;

– второй компонентой адекватной бинарной смеси является составной компонентой, которая включает все компоненты пятикомпонентной смеси за исключением первой.

Для решения этой задачи необходимо определить предельную форму (ПФ), ранговый массив и нормальную форму (НФ) адекватной бинарной смеси.

Значения массива класса предельной формы (ПФ) адекватной бинарной смеси определяем по выражениям:

$$q_{BA1} = q_{Bb1}; \quad q_{BA2} = \sum_{i=2}^N q_{Bbi};$$

$$q_{HA1} = q_{Hb1}; \quad q_{HA2} = \sum_{i=2}^N q_{Hbi}.$$

Подставив соответствующие значения исходных данных (табл. 5, 6), вычисляем значения массива класса предельной формы (ПФ) адекватной бинарной смеси. Результаты вычислений заносим в таблицу (табл. 7). Для массива класса предельной формы (ПФ) адекватной бинарной смеси (табл. 7) вычисляем суммы значений строк. Сумма значений для каждой

строки предельной формы (ПФ) адекватной бинарной смеси (см. табл. 7 – последняя колонка) равна 100%, а это означает, что предельная форма (ПФ) адекватной бинарной смеси сбалансирована.

Значения рангового массива адекватной бинарной смеси определяем по выражениям:

$$R_{A1} = \text{sign}(q_{BA1} - q_{HA1}); \quad R_{A2} = \text{sign}(q_{BA2} - q_{HA2}).$$

Подставляя исходные данные (табл. 7), вычисляем значения элементов рангового массива адекватной бинарной смеси. Результаты вычислений заносим в таблицу (табл. 8). Для рангового массива (табл. 8) по выражению (23) вычисляем значение рангового индекса смеси  $Ris$  (см. табл. 8 – последняя колонка).

Значения массива класса нормальной формы (НФ) адекватной бинарной смеси определяем по выражениям:

$$q_{A\max 1} = q_{BA1} \frac{R_{A1} + 1}{2} - q_{HA1} \frac{R_{A1} - 1}{2}; \quad q_{A\max 2} = q_{BA2} \frac{R_{A2} + 1}{2} - q_{HA2} \frac{R_{A2} - 1}{2};$$

$$q_{A\min 1} = q_{HA1} \frac{R_{A1} + 1}{2} - q_{BA1} \frac{R_{A1} - 1}{2}; \quad q_{A\min 2} = q_{HA2} \frac{R_{A2} + 1}{2} - q_{BA2} \frac{R_{A2} - 1}{2}.$$

Подставив соответствующие значения исходных данных (табл. 7, 8), вычисляем значения массива класса нормальной формы (НФ) адекватной бинарной смеси. Результаты вычислений заносим в таблицу (табл. 9). Для массива класса нормальной формы (НФ) адекватной бинарной смеси (табл. 9) по выражению (23) вычисляем значение критерия корректности массива класса смеси (см. табл. 9 – последняя колонка). Критерий корректности массива класса смеси равен единице, а это означает, что нормальная форма (НФ) адекватной бинарной смеси сбалансирована.

Таблица 7

*Предельная форма (ПФ) бинарной смеси*

j	1	2	Сумма
$q_{BAj}$	20,36%	79,64%	100,00%
$q_{HAj}$	31,78%	68,22%	100,00%

Таблица 8

*Ранговый массив бинарной смеси*

Компоненты	1	2	$Ris$
$R_{Aj}$	-1	1	2

Таблица 9

*Нормальная форма (НФ) бинарной смеси*

Компоненты	1	2	Критерий
$q_{A\max j}$	31,78%	79,64%	1
$q_{A\min j}$	20,36%	68,22%	



## Задача №2

Необходимо пятикомпонентную смесь, заданную предельной формой (ПФ) (табл. 5) представить в виде оптимальной бинарной смеси. Для этого необходимо определить предельную форму (ПФ), ранговый массив и нормальную форму (НФ) оптимальной бинарной смеси.

Значения массива класса предельной формы (ПФ) оптимальной бинарной смеси определяем по выражениям:

$$q_{BC1} = 0,5 \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^N R_i \cdot q_{Bbi} \right); \quad q_{BC2} = 0,5 \cdot \left( 1 - \sum_{i=1}^N R_i \cdot q_{Bbi} \right);$$

$$q_{HC1} = 0,5 \cdot \left( 1 + \sum_{i=1}^N R_i \cdot q_{Hbi} \right); \quad q_{HC2} = 0,5 \cdot \left( 1 - \sum_{i=1}^N R_i \cdot q_{Hbi} \right).$$

Подставив соответствующие значения исходных данных (табл. 5 и табл. 6), вычисляем значения массива класса предельной формы (ПФ) оптимальной бинарной смеси. Результаты вычислений заносим в таблицу (табл. 10). Для массива класса предельной формы (ПФ) оптимальной бинарной смеси (табл. 10) вычисляем суммы значений строк. Сумма значений для каждой строки предельной формы (ПФ) оптимальной бинарной смеси (см. табл. 10 – последняя колонка) равна 100%, а это означает, что предельная форма (ПФ) оптимальной бинарной смеси сбалансирована.

Значения рангового массива оптимальной бинарной смеси определяем по выражениям:

$$R_{C1} = \text{sign}(q_{BC1} - q_{HC1}); \quad R_{C2} = \text{sign}(q_{BC2} - q_{HC2}).$$

Подставляя исходные данные (табл. 10), вычисляем значения элементов рангового массива оптимальной бинарной смеси. Результаты вычислений заносим в таблицу (табл. 10). Для рангового массива (табл. 11) по выражению (23) вычисляем значение рангового индекса смеси  $R_{is}$  (см. табл. 11 – последняя колонка).

Значения массива класса нормальной формы (НФ) оптимальной бинарной смеси определяем по выражениям:

$$q_{C \max 1} = q_{BC1} \frac{R_{C1} + 1}{2} - q_{HC1} \frac{R_{C1} - 1}{2}; \quad q_{C \max 2} = q_{BC2} \frac{R_{C2} + 1}{2} - q_{HC2} \frac{R_{C2} - 1}{2};$$

$$q_{C \min 1} = q_{HC1} \frac{R_{C1} + 1}{2} - q_{BC1} \frac{R_{C1} - 1}{2}; \quad q_{C \min 2} = q_{HC2} \frac{R_{C2} + 1}{2} - q_{BC2} \frac{R_{C2} - 1}{2}.$$

Подставив соответствующие значения исходных данных (табл. 10, 11), вычисляем значения массива класса нормальной формы (НФ) оптимальной бинарной смеси. Результаты вычислений заносим в таблицу (табл. 12). Для массива класса нормальной формы (НФ) оптимальной бинарной смеси (табл. 12) по выражению (23) вычисляем значение критерия корректности массива класса смеси (см. табл. 12 Таблица – последняя колонка). Критерий корректности массива класса смеси равен единице, а это

Таблица 10

*Предельная форма (ПФ) оптимальной бинарной смеси*

Компоненты	1	2
$q_{BCj}$	38,30%	61,70%
$q_{HCj}$	16,74%	83,26%

Сумма
100,00%
100,00%

Таблица 11

*Ранговый массив оптимальной бинарной смеси*

Компоненты	1	2
$R_{Cj}$	1	-1

$R_{is}$
1

Таблица 12

*Нормальная форма (НФ) оптимальной бинарной смеси*

Компоненты	1	2
$q_{C_{maxj}}$	38,30%	83,26%
$q_{C_{minj}}$	16,74%	61,70%

Критерий
1

Если смесь задана массивом класса предельной формы (ПФ), то ранговый массив этой смеси однозначно определен. Если смесь задана массивом класса нормальной формы (НФ), то ранговый массив этой смеси может быть определен приближенно как наиболее подходящий для заданного массива класса. Как показали исследования, задание смеси массивом класса предельной формы (ПФ) или нормальной формы (НФ) может осуществляться стабильными и переходными массивами класса соответствующих форм задания смеси.

**Выводы.** В результате анализ закономерностей изменения содержания компонент смесей постоянного состава определены параметры переменных смесей, определение которых однозначно определяют смесь и позволяет классифицировать переменные смеси по этим параметрам.

Для смесей постоянного состава и переменного содержания компонент определены способы задания класса смеси с помощью массива класса двух форм: нормальной формы (НФ) задания смеси и предельной формы (ПФ) задания смеси. Определены условия корректности значений массивов класса для обеих форм задания смеси и методы корректировки значений массивов класса в случае, если значения массивов класса не корректны.

Определено понятие ранга компоненты и рангового массива смеси, методы их определения и свойства. Для классификации смесей по рангам компонент определено понятие рангового индекса смеси ( $R_{is}$ ), который показывает различия смесей в направлениях относительного изменения содержания компонент. Ранговый индекс смеси может использоваться как дополнительный классификационный параметр смесей.

Определены методы взаимного преобразования массивов класса двух форм задания смеси, а так же особенности и условия таких преобразований.

Полученные закономерности позволяют многокомпонентную смесь представить как смесь с меньшим числом компонент (понижить группу смеси), вплоть до бинарной смеси (группа 2), за счет объединения отдельных компонент заданной смеси в составные компоненты. При этом составные компоненты в адекватной смеси могут быть представлены любыми комбинациями компонент заданной смеси. Определен способ представления многокомпонентной смеси в виде оптимальной бинарной смеси.

Результаты могут быть использованы для определения законов распределения содержаний компонент в заданных многокомпонентных смесях со случайным изменением содержания, моделирования вещественного состава переменных смесей, оперативного прогнозирования содержания компонент в системах оперативного контроля вещественного состава переменных смесей.

Методология анализа рассматривается в общем виде и может быть применима к любым природным или искусственно созданным смесям с различными видами вещественного состава и фазовыми состояниями смеси и ее компонент.

*Список литературы:*

1. Задачник по количественному анализу, Изд. 3-е, доп., Изд-во «Химия», -Л., 1972, -376 с.
2. МИНЕРАЛОГИЯ КРИВОРОЖСКОГО БАССЕЙНА: Ответственный редактор акад. АН УССР Е.К. Лазаренко Издательство. –К.: "Наукова думка", 1977. -544 с.

УДК 681.51:622.771

ЗУБКЕВИЧ В.Ю., ГВУЗ «Криворожский национальный университет»

## **ОБОГАЩЕНИЕ МИНЕРАЛЬНОГО СЫРЬЯ МЕТОДОМ КУСКОВОЙ ТЕРМОГРАФИЧЕСКОЙ СОРТИРОВКИ**

*Была разработана новая технология кусковой сортировки, основанная на использовании термографического контроля физико-химических свойств обогащаемого кускового минерального сырья с использованием современных средств контроля в области инфракрасного излучения и специальных информационных технологий. Проведены экспериментальные исследования опытных образцов по термографической технологии по специальной программе. Целью таких исследований являлось определение устойчивых зависимостей параметров теплового образа контролируемого объекта от его физических и химических свойств.*

*Була розроблена нова технологія кусковий сортування, заснована на використанні термографічного контролю фізико-хімічних властивостей*